

Kombinace s opakováním

K -členná kombinace s opakováním z n prvků je neuspořádaná k -tice (nezáleží na pořadí, skupina k prvků) sestavená z těchto n prvků tak, že každý se v ní vyskytuje nejvýše k -krát.

Příklady

- ① Kolik částek lze zaplatit 3 mincemi, máme-li v peněžence korunové, dvoukorunové a pětikorunové mince, každý druh alespoň v pěti exemplářích?

1 1 1 1 1 2 1 1 5 1 2 2 1 2 5 1 5 5 2 2 2 2 2 5 2 5 5 5 5 5
•••| ••|• ••|• •|•• •|•• •|•• |••• |••• |••• |•••

každou kombinaci s opakováním zašifrujeme pomocí uspořádané skupiny koleček a svislých čárek takto: mince lze dát do 3 přihrádek (každá na stejný typ mincí, vyznačíme kolečky) oddělených přepážkou (vyznačíme svislou čárkou, potřebujeme dvě – přepážku mezi 1. a 2. přihrádkou a mezi 2. a 3.)

⇒ každé 3členné kombinaci s opakováním ze 3 prvků 1, 2, 3 odpovídá jediná uspořádaná 5tice o 3 kolečkách a 2 čárkách (a obráceně), tj. počet $K'(3, 3) = P'(3, 2)$ (počet permutací s opakováním ze 2 prvků (• |), přičemž • se opakuje 3krát a | 2krát)

$$p = K'(3, 3) = P'(3, 2) = \frac{(3+2)!}{3! \cdot 2!} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{(3+3-1)!}{3! \cdot 2!} = \binom{3+3-1}{3} = \binom{5}{3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 10$$

– obecně: každé k -členné kombinaci s opakováním z n prvků přiřadíme uspořádanou skupinu s k tečkami a $(n-1)$ čárkami, tj. permutaci s opakováním ze dvou prvků (• |), přičemž jeden se opakuje k -krát a druhý $(n-1)$ krát

$$K'(k, n) = P'(k, n-1) = \binom{n+k-1}{k} \quad [= K(k, n+k-1)]$$

POČET všech k -členných kombinací s opakováním z n prvků je $K'(k, n) = \binom{n+k-1}{k}$

- ② Vypište všechny 2členné kombinace s opakováním ze 3 prvků a, b, c a určete jejich počet.

$[a, a \quad b, b \quad c, c \quad a, b \quad a, c \quad b, c]$

$$p = K'(2, 3) = \binom{3+2-1}{2} = \binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 6$$

- ③ V sáčku jsou červené, modré a zelené kuličky, kuličky téže barvy jsou nerozlišitelné.

Určete, kolika způsoby lze vybrat 5 kuliček, jestliže v sáčku je

a) alespoň 5 kuliček od každé barvy 5tice ze 3 barev s opak, nezál. na poř.

$$p = K'(5, 3) = \binom{5+3-1}{5} = \binom{7}{5} = \binom{7}{2} = \frac{7 \cdot 6}{2 \cdot 1} = 21$$

b) 5 červených, 4 modré a 4 zelené jako a), ale nelze vytvořit pětici Z Z Z Z Z

$$\text{a } M M M M M \text{ (máme jen po 4 kuličkách)} \quad p = K'(5, 3) - 2 = 19$$

- ④ Určete počet kvádrů, jejichž velikosti hran jsou přirozená čísla nejvýše rovna deseti. Kolik je v tomto počtu krychlí?

– kvádr má 3 různé velikosti hran ⇒ vyb. trojice s opak. z 10 čísel, nezáleží na pořadí

$$p = K'(3, 10) = \binom{3+10-1}{3} = \binom{12}{3} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 220$$

– krychle má stejné hrany ⇒ 1, 1, 1 2, 2, 2 ... 10, 10, 10 $p' = 10$

- ⑤ V novinovém stánku je ke koupi deset druhů pohledů, přičemž každý druh je k dispozici v padesáti exemplářích. Určete, kolika způsoby lze zakoupit

a) 15 pohledů $p = K'(15, 10) = \binom{15+10-1}{15} = \binom{24}{15} = \binom{24}{9}$

b) 51 pohledů nelze vytv. skupiny 51 stejných, bylo by jich celkem 10

$$p = K'(51, 10) - 10 = \binom{51+10-1}{51} - 10 = \binom{60}{51} - 10 = \binom{60}{9} - 10$$

c) 8 různých pohledů bez opak. $K(8, 10) = \binom{10}{8} = \binom{10}{2} = \frac{10 \cdot 9}{2 \cdot 1} = 45$

- ⑥ Klenotník vybírá do prstenu 3 drahokamy, má 3 rubíny, 2 smaragdy a 5 safírů. Určete, kolika způsoby může tento výběr provést, považuje-li kameny téhož druhu za stejné?

$p = K'(3, 3) - 1$ nelze vybrat skupinu 3 smaragdů (má jen 2)

$$p = \binom{3+3-1}{3} - 1 = \binom{5}{3} - 1 = \binom{5}{2} - 1 = 9$$

- ⑦ Určete počet všech trojúhelníků, z nichž žádné 2 nejsou shodné a jejichž každá strana má velikost vyjádřenou některým z čísel $n+1, n+2, n+3, \dots, 2n$ ($n \in \mathbb{N}$).

Kolik z nich je a) rovnoramenných, b) rovnostranných?

trojice, s opak. z n čísel, nezál. na poř., ale každá trojice nemusí určovat trojúhelník $\Rightarrow$ musí platit trojúhelníková nerovnost (stačí ověřit pro 2 nejkratší a nejdelší stranu:

$$(n+1) + (n+1) > 2n \text{ pl.} \Rightarrow p = K'(3, n) = \binom{n+3-1}{3} = \binom{n+2}{3}$$

a) rovnoram. počet všech – počet různostran. (strany se neopak. $\Rightarrow$ komb. bez opak.)

$$p = K'(3, n) - K(3, n) = \binom{n+3-1}{3} - \binom{n}{3}$$

b) rovnostran. hled. trojice stejných čísel z n čísel (typu $n+1, n+1, n+1$) $p = n$

- ⑧ Určete počet všech trojúhelníků, z nichž žádné dva nejsou shodné a jejichž každá strana má velikost vyjádřenou jedním z čísel 4, 5, 6, 7.

hl. trojice ze 4 čísel, s opak., nez. na poř., ale musí platit troj. nerovnost (stačí ověřit pro dvě nejkratší a nejdelší stranu: $4 + 4 > 7$ pl.)

$$p = K'(3, 4) = \binom{3+4-1}{3} = \binom{6}{3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20$$

- ⑨ Apolloniiovou úlohou se rozumí úloha sestavit kružnici, která má tři z těchto vlastností: prochází daným bodem (B), dotýká se dané přímky (p), dotýká se dané kružnice (k). Určete počet všech Apolloniiových úloh, každou lze zapsat pomocí trojice písmen B, p, k.

3jice s op. ze 3 prvků, nez. na poř. $p = K'(3, 3) = \binom{3+3-1}{3} = \binom{5}{3} = \binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10$

- ⑩ Ze všech bílých šachových figurek bez krále a dámy, tj. z 8 pěšců (P), 2 věží (V), 2 jezdců (J) a 2 střelců (S) vybíráme a) dvojici b) trojici figurek. Jaký je počet možností pro jejich složení?

a) dvojici s opak., nez. na poř. $p = K'(2, 4) = \binom{2+4-1}{2} = \binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10$

b) trojici nemáme 3 V, 3 J, 3 S, nelze tedy vytvořit trojici VVV, JJJ, SSS

$$p = K'(3, 4) - 3 = \binom{3+4-1}{3} - 3 = \binom{6}{3} - 3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} - 3 = 20 - 3 = 17$$